POLIEDROS REGULARES: Duas Fórmulas e Um Bônus

Jocelino Sato
Edson Agustini
Universidade Federal de Uberlândia

1 Introdução

Em Matemática é frequente a busca por fórmulas e demonstrações simples que possam, de algum modo, facilitar o trabalho daqueles que as utilizam em projetos maiores, nas quais tais fórmulas são apenas ferramentas de devem ser práticas e eficientes. Em particular, professores que gostam de ensinar Geometria Espacial construindo e utilizando recursos dinâmicos do ambiente 3D do software *GeoGebra*, frequentemente encontram dificuldades quando precisam construir os cinco poliedros regulares convexos, ou os treze poliedros semirregulares convexos (também conhecidos como *Poliedros de Arquimedes*) e seus duais (chamados de *Poliedros de Catalan*). Nesse tipo de tarefa, são sempre muito bem-vindas fórmulas simples que relacionam as medidas dos diversos ângulos presentes em um poliedro regular convexo com o seu "gênero", que conforme veremos mais abaixo é caracterizado por apenas dois valores bem simples: o número de lados de cada face e o número de arestas que incidem em cada vértice.

Tendo em mente a dificuldade acima descrita, pesquisando em algumas referências mais avançadas, e mais antigas, encontramos em dois livros de Coxeter ([1] e [2]) duas fórmulas que relacionam ângulos e gêneros em poliedros regulares convexos. A primeira fórmula relaciona a medida de um ângulo central (vértice no centro do poliedro), determinado por dois vértices consecutivos do poliedro, com seu gênero. A segunda fórmula relaciona a medida de um ângulo diedral (entre duas faces adjacentes do poliedro) com seu gênero. O que chama a atenção nessas duas fórmulas, que apresentaremos e demonstraremos na Seção 2, é que elas são realmente "intrigantes" devido à sua simplicidade, tanto de enunciados, quanto de demonstrações que, aliás, procuramos reescrever de modo a torná-las mais simples e acessíveis ao entendimento de qualquer bom estudante de Ensino Médio.

Como uma feliz consequência das duas fórmulas apresentadas na Seção 2, temos um bônus: podemos deduzir de modo bastante simples várias outras fórmulas da geometria métrica dos poliedros regulares convexos. Esse ponto também é importante pois, tradicionalmente, algumas dessas deduções de fórmulas são bastante longas e trabalhosas de serem feitas. Neste texto vamos abordar na Seção 3, especificamente, as fórmulas métricas do raio da esfera circunscrita (circunsfera), raio do círculo circuncrito a face, raio da esfera inscrita (insfera), apótema de face, área e volume dos poliedros regulares.

Antes de começarmos, é sempre bom comentar alguns aspectos históricos dos poliedros regulares convexos. Possivelmente, a grande quantidade de simetrias que tais poliedros possuem tem despertado o interesse para seu estudo bem cedo na história do desenvolvimento da Matemática. Temos no Livro XIII de *Os Elementos*, de *Euclides* (325 a 265 a.C.), Proposições 13 a 17, a descrição dos cinco poliedros regulares convexos. Sim, todos eles já eram conhecidos desde a época dos gregos antigos.

Antes mesmo de Euclides, Platão (427 a 347 a.C.), no diálogo *Timaeus*, associou quatro dos cinco poliedros regulares conhecidos aos quatro elementos, segundo os quais para os gregos antigos, a natureza era constituída: terra (cubo), ar (octaedro), água (icosaedro) e fogo (tetraedro). Curiosamente, o dodecaedro ficou fora, embora mais tarde tenha-se tentado atribuí-lo ao universo... Possivelmente por conta desta associação, às vezes, os poliedros regulares convexos são chamado de *Poliedros de Platão*.

Platão, Euclides, Kepler (e seu modelo) e Euler

Mais tarde, já no século XVI, Kepler (1571 a 1630) associou os poliedros regulares convexos aos seis planetas do sistema solar conhecidos à sua época (Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno). O que Kepler fez foi trabalhar com um sistema de esferas inscritas e circunscritas concêntricas aos cinco poliedros. Considerando que uma mesma esfera pode ser inscrita a um poliedro e circunscrita a outro, ele tomou uma sequência com onze sólidos: esfera-octaedro-esfera-icosaedro-esfera-dodecaedro-esfera-tetraedro-esfera-cubo-esfera. A princípio, Kepler imaginou que as órbitas dos seis planetas estivessem contidas em cada uma das seis esferas concêntricas de diferentes raios desse sistema (o Sol estaria no centro dessas esferas). Obviamente não demorou muito para Kepler abandonar esse modelo de sistema solar, que serviu, de certo modo, para que o famoso astrônomo chegasse às suas três conhecidas e corretas leis, relacionadas com a curva cônica elipse: a *Lei das Órbitas*, a *Lei das Áreas* e a *Lei dos Períodos*.

Não poderíamos finalizar esse fragmento histórico sem citar Euler (1707 a 1783), um dos maiores matemáticos que já existiu e contribuiu em quase todas as áreas da Matemática de seu tempo. Euler também estudou os poliedros e demonstrou a fórmula $V - A + F = 2$, que se aplica aos poliedros regulares convexos, em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro. A fórmula é válida, na verdade, para uma ampla classe de poliedros (aqueles que são homeomorfos a uma esfera) e inclui poliedros não convexos. Infelizmente, a demonstração de Euler não era muito precisa justamente por haver, à sua época, uma imprecisão quanto à definição de poliedro.

É impressionante como um assunto com origens tão antigas é tão rico e, porque não, atual. Afinal, conforme já citado, quando trabalhamos com construções geométricas envolvendo sólidos no *GeoGebra*, os poliedros regulares convexos funcionam com uma espécie de "base", a partir da qual, por meio de várias operações geométricas, podemos construir uma enorme quantidade de outros tipos de poliedros. É uma pena que, às vezes, várias das demonstrações das diversas fórmulas que os envolvem sejam tão trabalhosas. E é nesse sentido, que este texto pretende contribuir. É claro que algumas manipulações de expressões algébricas ao longo das demonstrações que pretendemos apresentar são necessárias, mas esperamos ter tomado o cuidado suficiente de não aborrecer o leitor com esse tipo de conta, omitindo-as quando elas não são essenciais.

Por fim, antes de começarmos, cabe ressaltar que praticamente todas as figuras utilizadas nesse artigo foram confeccionadas pelos autores utilizando os recursos dinâmicos do ambiente 3D do *GeoGebra* (https://www.geogebra.org/m/hnheyays). Aliás, as construções foram feitas, inclusive, utilizando as fórmulas aqui deduzidas.

2 Duas Fórmulas Intrigantes: Ângulos e Gêneros

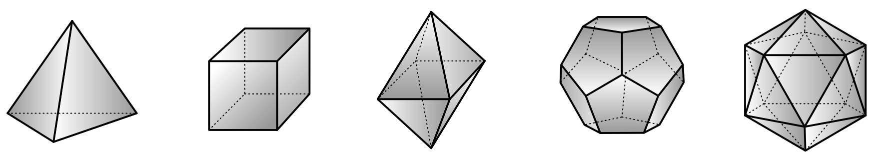
A menos de congruência, um poliedro regular convexo fica caracterizado por um par de números $\{p, q\}$, usualmente denominado *Símbolo de Schläfli*, em que

$$\begin{cases} p \text{ é a quantidade de lados de cada face do poliedro regular convexo;} \\ q \text{ é a quantidade de arestas que incidem em cada vértice do poliedro regular convexo.} \end{cases}$$

Geralmente, p é chamado de *gênero das faces* e q é chamado de *gênero dos vértices* do poliedro regular. Também é usual escrever *poliedro regular convexo de gêneros* $\{p, q\}$ ou, simplesmente, *poliedro* $\{p, q\}$ para referir-se a um poliedro regular convexo com o p e q dados, conforme estabelecido acima. Vamos adotar, daqui para frente, este modo mais simples de referir-se aos poliedros regulares convexos, lembrando, inclusive, que existem poliedros que são *regulares* mas não convexos. A palavra *regulares* está sendo empregada no sentido dos poliedros terem todas as faces constituídas por polígonos regulares, todas congruentes, e todos os vértices compostos pelo mesmo número de arestas.

Sendo assim, temos os seguintes valores para p e q, de acordo com cada um dos cinco poliedros $\{p, q\}$:

	Poliedro Regular	***Gênero*** p ***das Faces***	***Gênero*** q ***dos Vértices***	***Gêneros*** $\{p, q\}$ ***do Poliedro***
(1)	**Tetraedro** (4 faces)	3 (faces triangulares)	3 (ângulos triédricos)	$\{3, 3\}$
(2)	**Hexaedro** ou **Cubo** (6 faces)	4 (faces quadradas)	3 (ângulos triédricos)	$\{4, 3\}$
(3)	**Octaedro** (8 faces)	3 (faces triangulares)	4 (ângulos quadriédricos)	$\{3, 4\}$
(4)	**Dodecaedro** (12 faces)	5 (faces pentagonais)	3 (ângulos triédricos)	$\{5, 3\}$
(5)	**Icosaedro** (20 faces)	3 (faces triangulares)	5 (ângulos pentaédricos)	$\{3, 5\}$



(1) (2) (3) (4) (5)

Vamos deduzir duas fórmulas intrigantes, pela sua simplicidade e praticidade, envolvendo duas medidas importantes de ângulos em poliedros $\{p, q\}$ e seus gêneros. São elas:

Primeira Fórmula: medida α do ângulo central, ou seja, com vértice no centro do poliedro $\{p, q\}$, e que enxerga uma de suas arestas, em função dos gêneros p e q.

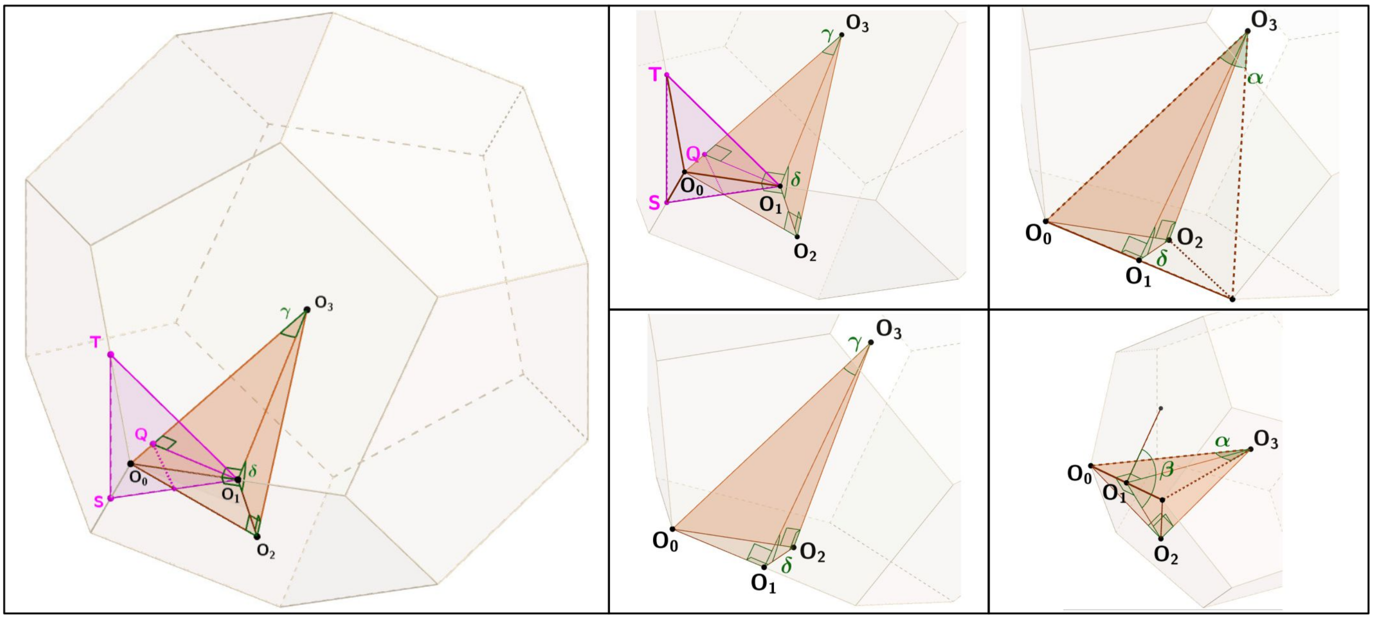
Segunda Fórmula: medida β do ângulo diedral, ou seja, do ângulo entre duas faces adjacentes de um poliedro $\{p, q\}$ em função dos gêneros p e q.

Na primeira fórmula, "enxergar" uma aresta significa que os extremos da aresta estão sobre os lados do ângulo.

Vamos ainda estabelecer as seguintes notações:

- O_0 é um vértice qualquer do poliedro $\{p, q\}$;
- O_1 é ponto médio de uma aresta qualquer que incide em O_0;
- O_2 é o centro de uma das faces que contém O_0 e O_1;
- O_3 é o centro do poliedro $\{p, q\}$;
- $S \neq O_1$ é ponto médio da outra aresta que está na mesma face que O_2 e que incide em O_0;
- Q é a projeção ortogonal de O_1 sobre o segmento O_0O_3;
- $l = \frac{a}{2}$ é o comprimento do segmento O_0O_1 ou O_0S (é, portanto, a metade do comprimento a de uma aresta);
- $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ (é, portanto, metade da medida do ângulo central com vértice em O_3 que enxerga uma aresta);
- $\delta = \frac{\beta}{2}$ (é, portanto, metade da medida do ângulo diedral entre duas faces).

As figuras abaixo ilustram os elementos acima para o caso do dodecaedro regular convexo:



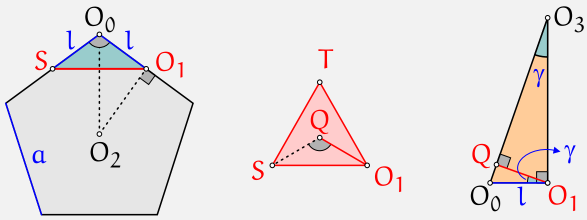
Com os elementos acima, podemos construir um tetraedro $O_0O_1O_2O_3$ muito especial, pois:

- O_0 está sobre a esfera de centro O_3 circunscrita ao poliedro (portanto, passa por todos os vértices do poliedro $\{p, q\}$);
- O_1 está sobre a esfera de centro O_3 que passa por todos os pontos médios das arestas do poliedro $\{p, q\}$;
- O_2 está sobre a esfera de centro O_3 inscrita ao poliedro (portanto, passa por todos os centros das faces do poliedro $\{p, q\}$).

Este tetraedro é constituído por quatro triângulos retângulos. Nas figuras acima é possível identificá-los.

Dedução da Primeira Fórmula:

O triângulo O_0O_1S está na face que contém O_2 e é isósceles, pois $O_0O_1 = O_0S = l$, e $O_1\widehat{O_0}S = \frac{(p-2)\pi}{p} = \pi - \frac{2\pi}{p}$ é ângulo interno da face.



Logo, pela *Lei dos Cossenos*:

$$(O_1S)^2 = l^2 + l^2 - 2l^2 \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right) = 4l^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \Rightarrow \boxed{O_1S = 2l \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

Consideremos o polígono $\mathcal{P}$ formado pelos pontos médios das q arestas que saem do vértice O_0 do poliedro. Este polígono $\mathcal{P}$ é regular e possui q lados, sendo S e O_1 dois de seus vértices. No caso da figura acima (dodecaedro), $\mathcal{P}$ é um triângulo (o triângulo O_1ST da figura).

Uma observação importante é que $\mathcal{P}$, de fato, é um polígono plano, pois seus vértices estão todos sobre um círculo que é a intersecção de duas esferas: a esfera de centro em O_3 e raio O_3O_1, e a esfera de centro em O_0 e raio O_0O_1.

É fácil verificar, usando congruência de triângulos, que o polígono $\mathcal{P}$ é ortogonal ao segmento O_0O_3 e, portanto, $Q \in \mathcal{P}$. Na verdade, Q é o centro do polígono regular $\mathcal{P}$.

Podemos calcular O_1Q (que é igual a SQ) utilizando novamente a *Lei dos Cossenos* no triângulo isósceles QO_1S, considerando que temos $O_1S = 2l\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)$ e que $O_1\widehat{Q}S$ mede $\frac{2\pi}{q}$ radianos (lembre-se de que $\mathcal{P}$ é um polígono regular de q lados e Q é o centro dele). Logo:

$$(O_1S)^2 = (O_1Q)^2 + (SQ)^2 - 2(O_1Q)(SQ)\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \Rightarrow$$

$$4l^2\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) = 2(O_1Q)^2\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)\right) \Rightarrow \boxed{O_1Q = l\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right)}}. \tag{1}$$

Podemos, ainda, calcular de outra forma o comprimento de O_1Q, saindo de $\mathcal{P}$ e considerando que este segmento é, também, altura relativa ao vértice O_1 do triângulo retângulo $O_0O_1O_3$. Neste caso, devido à semelhança entre os triângulos O_0O_1Q e O_1O_3Q, temos $O_0\widehat{O_1}Q = O_1\widehat{O_3}Q = \gamma$. Logo, olhando para o triângulo O_0O_1Q:

$$\cos(\gamma) = \frac{O_1Q}{l} \Rightarrow \boxed{O_1Q = l\cos(\gamma)}. \tag{2}$$

Agora, é só igualar os valores de O_1Q obtidos em (1) e (2) para termos nossa primeira fórmula:

$$l\cos(\gamma) = l\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right)} \Rightarrow \boxed{\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right)}}} \Rightarrow \boxed{\boxed{\alpha = 2\arccos\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)}}. \tag{3}$$

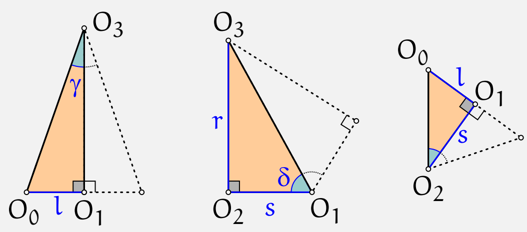
Note que a fórmula não envolve o comprimento das arestas do poliedro, como era de se esperar.

Dedução da Segunda Fórmula:

Do tetraedro $O_0O_1O_2O_3$ consideremos as seguintes relações:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\gamma) = \frac{l}{O_1O_3} \Rightarrow \boxed{O_1O_3 = \frac{l}{\operatorname{tg}(\gamma)}} & (4.a) \\ \operatorname{sen}(\delta) = \frac{O_2O_3}{O_1O_3} \Rightarrow \boxed{O_2O_3 = \frac{l\operatorname{sen}(\delta)}{\operatorname{tg}(\gamma)}}, & (4.b) \end{cases}$$

em que $r = O_2O_3$ é o raio da esfera inscrita no poliedro.



De $O_0\widehat{O_2}O_1 = \frac{1}{2}.\frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{p}$ temos:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{l}{O_1O_2} \Rightarrow \boxed{O_1O_2 = \frac{l}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{p}\right)}}, \tag{5}$$

sendo $s = O_1O_2$ o apótema da face do poliedro.

Sendo o triângulo $O_3O_2O_1$ um triângulo retângulo com ângulo reto em O_2, pelo *Teorema de Pitágoras*:

$$(O_1O_3)^2 = (O_2O_3)^2 + (O_1O_2)^2 \Rightarrow \frac{l^2}{\operatorname{tg}^2(\gamma)} = \frac{l^2\operatorname{sen}^2(\delta)}{\operatorname{tg}^2(\gamma)} + \frac{l^2}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \Rightarrow \cos^2(\delta) = \frac{\sec^2(\gamma)-1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \Rightarrow$$

$$\cos^2(\delta) = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} - 1}{\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}} \Rightarrow \operatorname{sen}(\delta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)} \Rightarrow \boxed{\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}}} \Rightarrow \boxed{\boxed{\beta = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)}} \tag{6}$$

Por fim, os valores exatos em radianos, e aproximados em graus, dos ângulos (exceto os retos) para cada um dos cinco poliedros regulares:

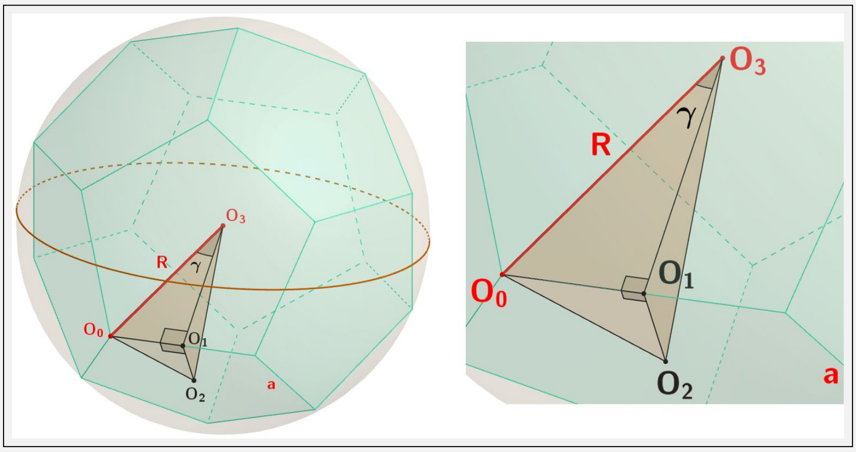
Poliedro Regular	***Gênero*** p ***de Faces***	***Gênero*** q ***de Vértices***	***Ângulo*** α ***Central***	***Ângulo*** β ***Diedral***
Tetraedro	3	3	$2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ rad $\cong 109,47°$	$2\,\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cong 70,53°$
Hexaedro (cubo)	4	3	$2\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ rad $\cong 70,53°$	$\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$
Octaedro	3	4	$\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$	$2\,\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ rad $\cong 109,47°$
Dodecaedro	5	3	$2\arccos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}\right)$ rad $\cong 41,81°$	$2\,\text{arcsen}\left(\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)$ rad $\cong 116,57°$
Icosaedro	3	5	$2\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)$ rad $\cong 63,43°$	$2\,\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}\right)$ rad $\cong 138,19°$

3 Um Bônus: Algumas Fórmulas Antes Trabalhosas

Usando as notações da seção anterior e denotando por a a medida das arestas do poliedro $\{p, q\}$, vamos estabelecer algumas fórmulas genéricas envolvendo a, p e q para a geometria métrica em poliedros regulares convexos. Tais fórmulas quase sempre decorrem das igualdades que permitiram a demonstração das Fórmulas (3) e (6) ou, quando não, serão deduzidas a seguir.

Fórmula do Raio da Esfera Circunscrita ao Poliedro (circunsfera)

Seja R o raio da esfera circunscrita a um poliedro $\{p, q\}$. Na figura abaixo, $R = O_0O_3$.



No triângulo retângulo $O_0O_1O_3$ temos $\text{sen}\,(\gamma) = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{O_0O_1}{O_0O_3}$. Lembrando que $a = 2O_0O_1$ e utilizando a Fórmula (3):

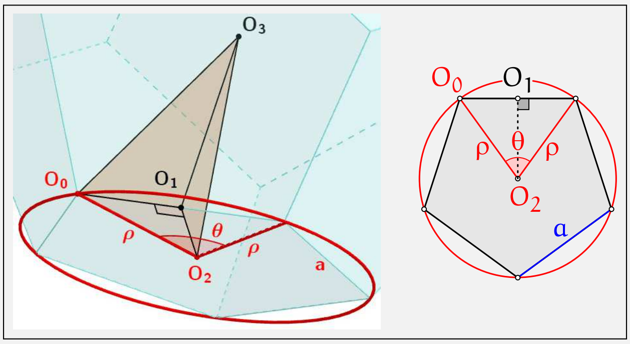
$$\text{sen}\,(\gamma) = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow a = 2R\,\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{R = \frac{a}{2\sqrt{1-\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)^2}}}. \tag{7}$$

Assim:

Poliedro Regular	***Gênero*** p ***de Faces***	***Gênero*** q ***de Vértices***	***Raio*** R ***da Esfera Circunscrita ao Poliedro Regular***
Tetraedro	3	3	$\frac{a}{2\sqrt{1-\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a \cong 0,6124a$
Hexaedro (cubo)	4	3	$\frac{a}{2\sqrt{1-\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \cong 0,866a$
Octaedro	3	4	$\frac{a}{2\sqrt{1-\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \cong 0,7071a$
Dodecaedro	5	3	$\frac{a}{2\sqrt{1-\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}a \cong 1,4013a$
Icosaedro	3	5	$\frac{a}{2\sqrt{1-\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right)^2}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a \cong 0,9511a$

Fórmula do Raio do Círculo Circunscrito a Face do Poliedro

Seja $\rho = O_0O_2$ o raio do círculo circunscrito a uma face do poliedro $\{p, q\}$.



A face do poliedro $\{p, q\}$ é um polígono regular de p arestas de medida a, assim, $\theta = \frac{2\pi}{p}$ é a medida do ângulo que tem vértice no centro do polígono e lados passando por dois vértices consecutivos. E, do triângulo retângulo $O_0O_1O_2$, obtemos a igualdade

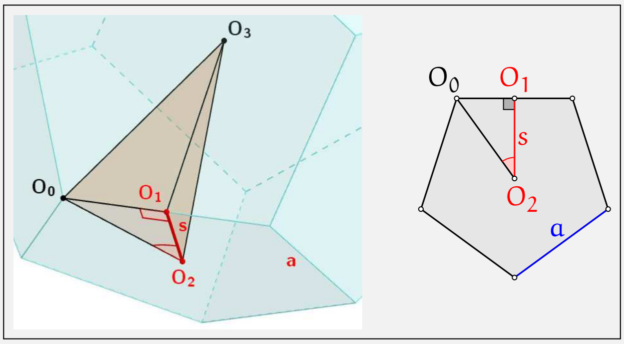
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{O_0O_1}{O_0O_2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \Rightarrow \boxed{\boxed{\rho = \frac{a}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}}}. \tag{8}$$

Assim:

Poliedro Regular	***Gênero p de Faces***	***Raio ρ do Círculo Circunscrito a Face do Poliedro Regular***
Tetraedro	3	$\frac{a}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \cong 0,5774a$
Hexaedro (cubo)	4	$\frac{a}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \cong 0,7071a$
Octaedro	3	$\frac{a}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \cong 0,5774a$
Dodecaedro	5	$\frac{a}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}a \cong 0,8507a$
Icosaedro	3	$\frac{a}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \cong 0,5774a$

Fórmula do Apótema de Face do Poliedro

Seja $s = O_1O_2$ o comprimento do apótema de face do poliedro $\{p, q\}$.



Conforme já mostrado na prova da Fórmula (5), no triângulo retângulo $O_0O_1O_2$ temos

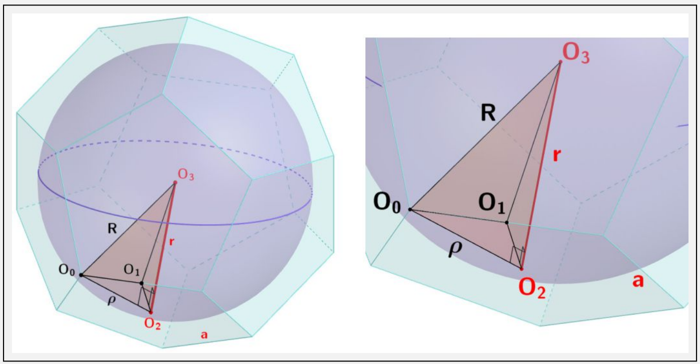
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{O_0O_1}{O_1O_2} = \frac{\frac{a}{2}}{s} \Rightarrow \boxed{\boxed{s = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{p}\right)}}. \tag{9}$$

Assim:

Poliedro Regular	***Gênero p das Faces***	***Apótema s de Face do Poliedro Regular***
Tetraedro	3	$\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cong 0,2887a$
Hexaedro (cubo)	4	$\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}a \cong 0,5a$
Octaedro	3	$\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cong 0,2887a$
Dodecaedro	5	$\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}a \cong 0,6882a$
Icosaedro	3	$\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cong 0,2887a$

Fórmula do Raio da Esfera Inscrita ao Poliedro (insfera)

Seja $r = O_3O_2$ o raio da esfera inscrita ao poliedro $\{p, q\}$.



Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $O_0O_3O_2$, temos a igualdade $(O_3O_0)^2 = (O_3O_2)^2 + (O_2O_0)^2$. Portanto, a distância $r = O_3O_2$ entre o centro do poliedro e o centro de uma face satisfaz

$$r = \sqrt{R^2 - \rho^2}. \tag{10}$$

Como temos as expressões de R e ρ em função de a, p e q dadas em (7) e (8), então r também pode ser colocado também em função desses últimos três parâmetros. Por outro lado, em (4.b) temos

$$r = \frac{a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \tag{11}$$

Como α e β também foram dados em termos de p e q por meio das Fórmulas (3) e (6), temos r também em função de a, p e q.

Naturalmente as duas expressões expressões são equivalentes e, com alguma manipulação algébrica, chegamos a

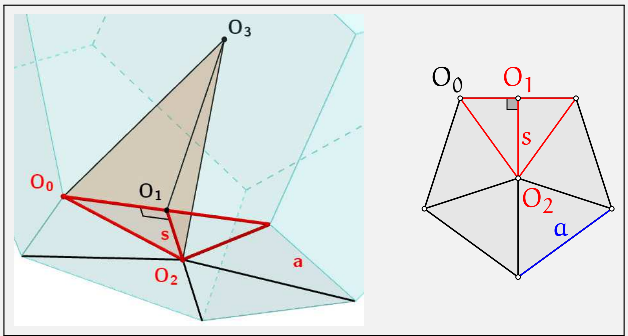
$$\boxed{r = \frac{a}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}}. \tag{12}$$

Assim:

Poliedro Regular	*Gênero p de Faces*	*Gênero q de Vértices*	*Raio r da Esfera Inscrita ao Poliedro Regular*
Tetraedro	3	3	$\frac{a}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{6}}{12}a \cong 0,2041a$
Hexaedro (cubo)	4	3	$\frac{a}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{1}{2}a = 0,5a$
Octaedro	3	4	$\frac{a}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{6}}{6}a \cong 0,4082a$
Dodecaedro	5	3	$\frac{a}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}} = \frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a \cong 1,1135a$
Icosaedro	3	5	$\frac{a}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}a \cong 0,7558a$

Fórmula da Área do Poliedro

Para poliedros $\{p, q\}$, a área é dada por $\text{área}\,(\{p, q\}) = Fp\left(\frac{1}{2}as\right)$, sendo s o comprimento do apótema da face e F a quantidade de faces. Nesta fórmula, $\frac{1}{2}as$ é a área de um triângulo com base medindo a e altura s. Como cada face possui exatamente p desses triângulos, então a fórmula segue.



Como já temos $s = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{p}\right)$ dada em (9), então:

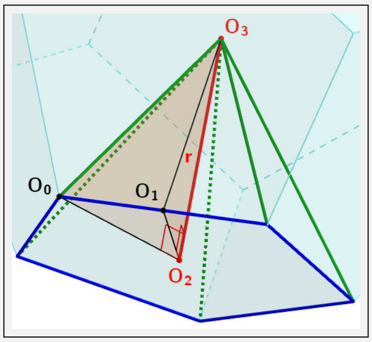
$$\boxed{\mathrm{área}\left(\{p,q\}\right) = Fp\frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{p}\right)}. \tag{13}$$

Assim:

Poliedro Regular	***Número*** F ***de Faces***	***Gênero*** p ***de Faces***	***Área*** $\mathrm{área}\left(\{p,q\}\right)$ ***do Poliedro Regular***
Tetraedro	4 (triangulares)	3	$3a^2\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}a^2 \cong 1,7321a^2$
Hexaedro (cubo)	6 (quadradas)	4	$6a^2\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6a^2$
Octaedro	8 (triangulares)	3	$6a^2\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}a^2 \cong 3,4641a^2$
Dodecaedro	12 (pentagonais)	5	$15a^2\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2 \cong 20,6457a^2$
Icosaedro	20 (triangulares)	3	$15a^2\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}a^2 \cong 8,6603a^2$

Fórmula do Volume do Poliedro

Para poliedros $\{p,q\}$, o volume é dado por $\mathrm{vol}\left(\{p,q\}\right) = \frac{1}{3}\mathrm{área}\left(\{p,q\}\right)r$, sendo r o raio da esfera inscrita ao poliedro e $\mathrm{área}\left(\{p,q\}\right)$ sua área. Para justificar essa fórmula, sendo F a quantidade de faces do poliedro, então $\frac{\mathrm{área}(\{p,q\})}{F}$ é a área de uma face apenas, lembrando que $\mathrm{área}\left(\{p,q\}\right)$ é a área do poliedro já encontrada acima. Então, $\frac{1}{3}\frac{\mathrm{área}(\{p,q\})}{F}r$ é o volume de uma pirâmide de base em uma face do poliedro e altura r. Como F pirâmides como esta preenchem o poliedro, temos nossa fórmula de volume justificada.



Como temos $r = \frac{a}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}$ e $\mathrm{área}\left(\{p,q\}\right) = Fp\frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{p}\right)$ já demonstrados em (12) e (13), então:

$$\boxed{\mathrm{vol}(\{p,q\}) = Fp\frac{a^3}{24}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}}. \tag{14}$$

Assim:

Poliedro Regular	***N°.*** F ***de Faces***	***Gênero*** p ***de Faces***	***Gênero*** q ***de Vértices***	***Volume*** $\mathrm{vol}\{p,q\}$ ***do Poliedro Regular***
Tetraedro	4 (triangulares)	3	3	$\frac{a^3}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \cong 0,1179a^3$
Hexaedro (cubo)	6 (quadradas)	4	3	$a^3\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = a^3$
Octaedro	8 (triangulares)	3	4	$a^3\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 \cong 0,4714a^3$
Dodecaedro	12 (pentagonais)	5	3	$\frac{5a^3}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}} = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3 \cong 7,6631a^3$
Icosaedro	20 (triangulares)	3	5	$\frac{5a^3}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3 \cong 2,1817a^3$

Por fim, algumas palavras adicionais sobre o V, A e F da Relação de Euler $V - A + F = 2$ que citamos no início do texto: é possível colocá-los em função dos gêneros p e q. Aliás, essas fórmulas são usadas para demonstrar que existem, a menos de tamanho, apenas cinco poliedros regulares convexos. Para falar a verdade, elas são consequência direta da própria Relação de Euler e das igualdades imediatas $pF = 2A = qV$. São elas:

$$\boxed{V = \frac{4p}{4-(p-2)(q-2)}}, \boxed{A = \frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)}} \text{ e } \boxed{F = \frac{4q}{4-(p-2)(q-2)}}. \tag{15}$$

4 Referências

[1] Coxeter, H. S. M. **Introduction to Geometry**. 2^{nd} ed. New York: John Wiley & Sons Inc. 1969.

[2] Coxeter, H. S. M. **Regular Polytopes**. 3^{rd} ed. New York: Dover Publications, Inc. 1973.

[3] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E. & Morgado, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol 2. 7^{a} ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática (Coleção do Professor de Matemática). 2016.

[4] Lima, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. 6^{a} ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática (Coleção do Professor de Matemática). 2012.