artigo

O CURIOSO PROBLEMA DO QUADRADO

ANDRÉ COSTA – IFPE

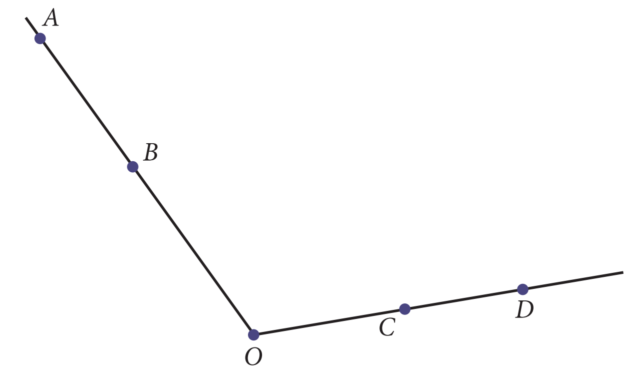
"Como construir um quadrado sendo dados um ponto em cada lado." Esse problema me tirou o sono em 2006, em um curso para professores premiados da OBMEP. Depois em 2016, durante as aulas de Construções Geométricas para alunos do PIC/OBMEP. No entanto, esse problema ainda vem divertindo a equipe de Matemática do IFPE nos últimos dias.

Um esboço de uma bela solução é fornecido em [1], mas, como de costume, seguindo a dica do brilhante físico Richard Feynman, devemos procurar nosso próprio caminho. Vale observar que fica mais fácil de encontrar a nossa própria solução, se não virmos nenhuma explicação (ou dica) anterior.

A trajetória da resposta encontrada passa pela solução de outros dois interessantes problemas.

Problema 1: "São dados os pontos A, B, C e D sobre a reta r. Trace por A e B duas paralelas, e trace por C e D outras duas paralelas, de forma que as interseções dessas retas formem um quadrado."

Problema 2: "Considere um ângulo $\hat{O}$ de vértice O. Sejam os pontos A e B sobre um dos lados de $\hat{O}$ e C e D sobre o outro lado de $\hat{O}$. Trace por A e B duas paralelas, e trace por C e D outras duas paralelas, de forma que as interseções dessas retas formem um quadrado."



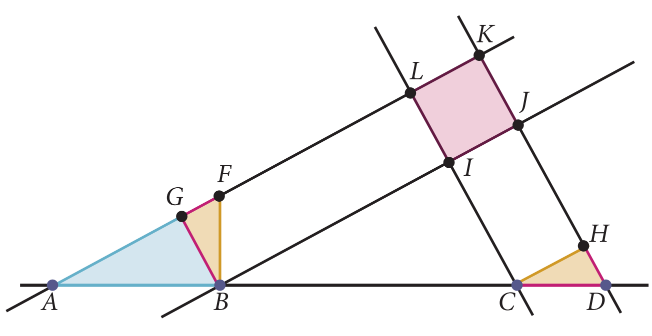
A técnica padrão para se resolver problemas de construções geométricas é:

i) supor que já se conhece a solução;

ii) encontrar alguma propriedade geométrica ligando os dados à solução;

iii) utilizar essa propriedade para construir o objeto desejado.

Supondo que o problema 1 esteja resolvido na figura abaixo, construímos os triângulos ABG e CDH, retângulos em G e H, respectivamente, com os lados BG e CH congruentes aos lados do quadrado $IJKL$.

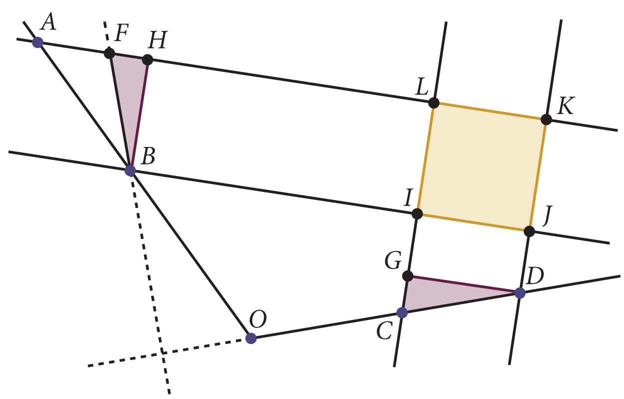


Como os lados AG e CH estão sobre retas suporte paralelas, assim como os lados BG e DH, ABG e CDH são retângulos e semelhantes.

Construímos o triângulo ABF pela junção dos triângulos ABG e BGF, em que $BGF \equiv CDH$ são triângulos congruentes. Da construção, temos que o ângulo $\angle ABF$ é reto, pois vem da junção dos ângulos complementares dos triângulos retângulos semelhantes ABG e CDH, e temos também que $BF = CD$.

Revertendo o processo, obtemos as retas pedidas. Ou seja, do ponto B, construímos um segmento BF, perpendicular à AB, de comprimento CD. Em seguida, construímos a reta AF, uma reta paralela à AF, que passa por B, e finalmente, retas perpendiculares à a AF passando por C e D.

Para o problema 2, a solução é bem parecida. Construímos os triângulo retângulos ABH e CDG, que possuem os lados $BH = DG$, com a mesma medida do lado do quadrado $IJKL$.



Em seguida, construímos o triângulo ABF, a partir da sobreposição do triângulo ABH pelo triângulo BHF, congruente ao triângulo CDG, tendo o lado BH congruente à DG, que é congruente