ELIPSES E AS ÓRBITAS DOS PLANETAS

PAULO ANTONIO ESQUEF
SÉRGIO ARMANDO P. RIBEIRO

Ensina-se, no nível médio, que as órbitas dos planetas do sistema solar são regidas pelas três leis de Kepler, das quais a primeira afirma que: "a órbita de qualquer planeta do sistema solar é elíptica, com o Sol em um de seus focos".

Os livros tradicionais de Física mostram elipses representativas das órbitas (na maioria das vezes com excentricidades exageradas) e apresentam tabelas com dados astronômicos relativos aos planetas, mas não determinam as equações dessas elipses. Por outro lado, em Matemática, no estudo das cônicas, o aluno se depara com a elipse, aprende sua equação, e propriedades como a excentricidade, etc., sem que, em geral, lhe seja mencionada alguma aplicação. A partir daí surgiu a ideia de mostrar a utilidade das elipses no estudo das órbitas dos planetas, usando dados astronômicos e escolhas apropriadas de fatores de escala.

O objetivo deste trabalho é, então, obter a equação cartesiana da órbita de um planeta em função do seu **afélio** – o ponto da órbita em que o planeta está mais afastado do Sol – e do seu **periélio** – o ponto da órbita em que ele está mais próximo do Sol.

As distâncias entre o Sol e os afélios e periélios dos planetas do sistema solar são facilmente encontradas em livros de Astronomia ou em *sites* adequados da *Internet*.

Criando um sistema cartesiano no plano orbital

No plano orbital do planeta (plano que contém a sua órbita), vamos imaginar, com o auxílio da figura 1, um eixo x passando pelos dois focos da elipse: um o Sol, S, e o outro o pequeno ponto à direita. O eixo y é perpendicular ao eixo x e passa pelo Sol. O Sol é o único elemento "fixo" do sistema.

A figura 1 também mostra o planeta (símbolo 🌎) no seu afélio e periélio, sendo A e P, respectivamente, a distância do afélio e do periélio ao Sol.

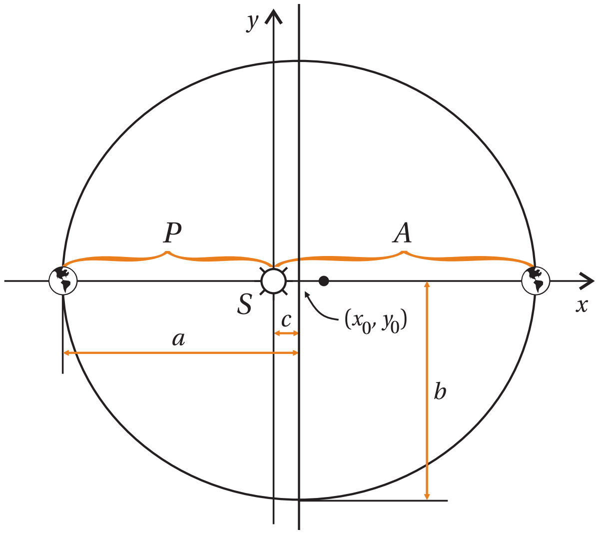

figura 1: planeta (simbolizado por 🌎) no seu afélio e periélio

Obtendo a posição do planeta em função de A e P

Vamos partir da equação da elipse $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ em que a é a metade do eixo maior, b a metade do eixo menor e x_0 e y_0 são as coordenadas do centro da elipse no sistema cartesiano. A distância entre os focos vale $2c$. No nosso caso, temos $x_0 = c$ e $y_0 = 0$. Então, a equação da elipse fica $\dfrac{(x-c)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$ (*)

Da figura 1, temos $A + P = 2a$ e $P + 2c = A$, o que permite obter a e c em função de A e P: $a=\dfrac{A+P}{2}$ e $c=\dfrac{A-P}{2}$.

Substituindo esses valores de a e c na relação conhecida entre a, b e c,