PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES E O CÁLCULO DA ÁREA DE TRIÂNGULOS: EXEMPLOS SIGNIFICATIVOS

FÁBIO MARSON FERREIRA E WALTER SPINELLI
PROFESSORES DO COLÉGIO MÓBILE, SÃO PAULO

Recentemente nos desafiamos a enriquecer a discussão do conteúdo relativo aos determinantes, que ministrávamos para as classes de ensino médio do colégio em que lecionamos, buscando exemplos significativos para a apresentação das suas propriedades.

Com esse intuito, propusemos a exploração de quatro propriedades dos determinantes a partir do uso da fórmula do cálculo da área de um triângulo cujos vértices são pontos localizados sobre o plano cartesiano, o que deverá servir de ilustração da proposta de trabalho adotada. Ficará por conta do leitor a investigação e descoberta de caminhos para a exploração de outras propriedades dos determinantes.

Fórmula para o cálculo da área de um triângulo e convenção de notação

Para determinar a área de um triângulo ABC, localizado sobre o plano cartesiano, e cujos vértices são os pontos $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$ e $C=(x_C, y_C)$, pode-se fazer:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\det S|, \text{ com } S=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}^{(*)}.$$

(*) A fórmula para o cálculo da área de um triângulo envolve o valor absoluto de um determinante. Para simplificar, adotaremos neste artigo uma notação que omite o módulo do determinante, porém, nos cálculos, levaremos sempre em consideração o valor absoluto do determinante.

Sendo assim, para cada propriedade que analisarmos, apresentaremos um exemplo do cálculo da área de um triângulo na situação correspondente. Nesse percurso, observaremos as transformações sofridas, tanto na matriz S, quanto nas posições dos vértices dos respectivos triângulos no plano cartesiano.

Qualquer transformação que altere a terceira coluna da matriz S não se presta aos nossos propósitos, já que essa coluna deve sempre ter elementos unitários de acordo com a fórmula de cálculo da área de triângulo. Nesse sentido, propriedades dos determinantes que mantêm relação com alguma modificação na terceira coluna da matriz S, como, por exemplo, a da matriz transposta que possui determinante igual ao da matriz original, não têm interesse no tipo de investigação que faremos. Em algumas das propriedades que analisaremos, a transformação só será pertinente sob alguns aspectos específicos, que procuraremos explicitar.

1ª propriedade: Se os elementos de uma fila qualquer de uma matriz A, com determinante D, forem multiplicados por um número k, o determinante da nova matriz B será o produto de $k.D$, ou seja, $\det B = k \det A$.

Como ilustração, vamos calcular os determinantes de três matrizes, sendo que a segunda e a terceira matrizes tiveram uma de suas colunas multiplicada por um fator k, nesse caso igual a 2.

Observe o cálculo das áreas dos triângulos pelos determinantes correspondentes e a figura:

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad S_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix} \quad S_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$