Por que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$?

José Paulo Carneiro
Comitê Editorial da RPM

Introdução

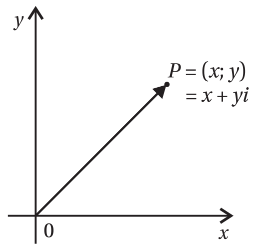
A chamada "fórmula de Euler" (uma dentre muitas)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

tem sido objeto de várias citações na RPM (ver RPM 3, p. 18, e RPM 63, p. 1). Especialmente famoso é o caso em que $\theta = \pi$, obtendo-se: $e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1 + 0i = -1$, geralmente colocado na forma: $e^{i\pi} + 1 = 0$, uma bonita expressão que reúne numa fórmula sintética os números $0, 1, i, e, \pi$. Porém muita gente sente falta de uma explicação convincente para a fórmula de Euler. Ocorre que uma justificativa completa dessa fórmula só pode ser feita utilizando os instrumentos do Cálculo Diferencial e Integral. Mas vamos expor os resultados, na convicção de que não é impossível entender o que se passa, mesmo sem reproduzir todos os detalhes técnicos.

Complexos unitários

Comecemos pelo lado direito da igualdade. Ao trabalhar com números complexos, cada complexo $x + yi$ será identificado com o par ordenado $(x; y)$, ou com o ponto do plano P de coordenadas do plano $(x; y)$, ou com o vetor $\overrightarrow{OP}$.



O módulo do número complexo $x + yi$ é a sua distância à origem $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Portanto, o número complexo $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ tem módulo $\sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$, ou seja, é um complexo **unitário**. Vamos representar provisoriamente $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ por $\operatorname{cis}\theta$ (comentaremos mais adiante a questão da notação). O número (ou ângulo) θ é chamado um **argumento** do unitário $\operatorname{cis}\theta$.

A definição do produto de dois complexos:
$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$ acarreta que o produto de dois complexos unitários é dado por:

$$\operatorname{cis}\alpha.\operatorname{cis}\beta = (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) =$$
$$(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) + (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha)i.$$

Porém, pelas conhecidas fórmulas trigonométricas:

$$\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha + \beta)$$
$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \beta).$$

Logo, $\operatorname{cis}\alpha.\operatorname{cis}\beta = \operatorname{cis}(\alpha + \beta)$.

Em palavras: multiplicando dois complexos unitários, obtém-se outro complexo unitário que tem por argumento a soma dos argumentos dos fatores.

O complexo $1 = 1 + 0i = (1; 0) = \cos 0 + i\operatorname{sen} 0 = \operatorname{cis} 0$ exerce o papel de neutro na multiplicação de unitários (e de complexos em geral). Além disso, $\operatorname{cis}\alpha.\operatorname{cis}(-\alpha) = \operatorname{cis}(\alpha - \alpha) = \operatorname{cis} 0 = 1$, o que acarreta $\operatorname{cis}(-\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{cis}\alpha}$, o inverso de $\operatorname{cis}\alpha$.

A tabela a seguir faz uma comparação entre essas propriedades e as propriedades das potências (por exemplo, de números reais).

Unitários	**Potências**
$\operatorname{cis}(\alpha + \beta) = \operatorname{cis}\alpha.\operatorname{cis}\beta$	$c^{a+b} = c^a c^b$
$\operatorname{cis} 0 = 1$	$c^0 = 1$
$\operatorname{cis}(-\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{cis}\alpha}$	$c^{-a} = \dfrac{1}{c^a}$

Essa analogia já sugere que os complexos unitários talvez possam ser escritos como potências de alguma base. Mas por que exatamente $e^{i\theta}$? Vamos então agora analisar o lado esquerdo da fórmula de Euler.