PAINEL I: Curiosas igualdades

JOEL FARIA DE ABREU

Existem na Matemática certas igualdades que o professor deveria, em momento oportuno, apresentar aos alunos, por serem interessantes e, mais do que isso, dignas de contemplação e admiração.

Um bom exemplo é a bela igualdade

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

descoberta pelo grande matemático suíço do século XVIII Leonardo Euler (ver RPM 3, pág. 23).

Veja também os exemplos:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

Também digna de contemplação é

$$20\,615\,673^4 = 2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4,$$

descoberta em 1988 pelo professor de Matemática da Universidade de Harvard, Noam Elkies, sendo mais um contraexemplo para uma histórica conjectura de Euler, que acreditava não haver soluções com números inteiros diferentes de zero para a equação $a^4 = b^4 + c^4 + d^4$ (veja referências).

Agora, caro professor, você está convidado a inventar as suas próprias igualdades curiosas. Peça a três de seus alunos que cada um diga o dia do mês em que nasceu. Suponha que esses números tenham sido, por exemplo: 7, 18 e 22. A soma dos quadrados desses números é:

$$7^2 + 18^2 + 22^2 = 857.$$

Lembrando que todo número ímpar é uma diferença de dois quadrados consecutivos, pois $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$, tire proveito do fato de que 857 é ímpar e use essa propriedade: $857 = 2 \times 428 + 1 = 429^2 - 428^2$.

Finalmente, escrevemos

$$429^2 = 428^2 + 7^2 + 18^2 + 22^2,$$

igualdade curiosa, que usa os números fornecidos pelos alunos.

Se os números dados pelos alunos tiverem soma dos quadrados par, você pode pedir outros números a outros alunos até que a soma resulte ímpar, ou usar um número de sua criação. Por exemplo, se os números dados forem 7, 18 e 21, você pode dizer que tem uma prima que nasceu no dia 11, e calcular

$7^2 + 18^2 + 21^2 + 11^2 = 935 = 2 \times 467 + 1$, para apresentar a igualdade

$$468^2 = 467^2 + 7^2 + 18^2 + 21^2 + 11^2.$$

Referências

http://mathworld.wolfram.com/EulersSumofPowersConjecture.html

Hoffman, Paul. *O homem que só gostava de números.* Lisboa: Gradiva, 2000.

Painel II: Ângulos entre ponteiros de um relógio

Fernando Henrique A. de Araújo
Antonio Leonardo P. Pastor

Embora a RPM já tenha publicado dois artigos (RPM 11 e RPM 15) sobre ângulos entre ponteiros de um relógio, considerando o longo tempo passado desde essas publicações e o interesse ainda manifestado por leitores sobre o tema, resolvemos mais uma vez abordar o assunto. O que apresentamos a seguir é parte do texto enviado agora pelo licenciando em Matemática, Fernando Henrique Antunes de Araújo, e parte do publicado na RPM 11, no artigo *O problema do relógio. Solução simplificada de um problema angular*, de autoria de Antonio Leonardo P. Pastor.

O Fernando Henrique nos conta que entre os colegas do curso de licenciatura em Matemática, muitos tinham dificuldades em resolver o problema: qual é o ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos quando um relógio marca 12h15min?