

A FUNÇÃO $1/x$ É DESCONTÍNUA NO ZERO?

ANTÔNIO LUIZ PEREIRA - IME/USP
ERNESTO ROSA

Apresentação

O professor Ernesto Rosa enviou para a RPM alguns trechos, retirados de livros didáticos do ensino médio, sobre continuidade de funções reais. Ciente das falhas existentes, sugeriu que o tema fosse abordado pela RPM. O presente artigo, escrito em coautoria com o professor Antônio Luiz Pereira, do Comitê Editorial da RPM, incorpora as ideias expressas por Ernesto Rosa e amplia um pouco seu escopo.

Limite *versus* continuidade em um ponto

A função $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = 1/x$, é uma função contínua que é descontínua no ponto $x = 0$. Contraditório? Não necessariamente. Veremos que, dependendo de como os conceitos são definidos, a frase pode ser verdadeira.

As definições modernas de limite e continuidade de funções reais em um ponto a expressam, de forma precisa, a ideia de que os valores da função devem se aproximar de um certo valor L quando a variável independente se aproxima de a . No caso da continuidade, esse limite deve ser igual a $f(a)$. Essas definições são um tanto sofisticadas e sugerimos ao leitor que quiser se aprofundar no tema

a consulta a qualquer bom texto introdutório de Análise (por exemplo [1] ou [2]). Para facilitar a leitura deste artigo, apresentaremos essas definições mais à frente. O que queremos enfatizar é que, sendo esses dois conceitos estreitamente ligados, não é surpreendente que, sob certas condições, um deles possa ser definido a partir do outro. Surge aqui, porém, uma dificuldade: os dois conceitos NÃO estão, em geral, definidos no mesmo conjunto de pontos. De fato, se $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real, na definição de continuidade exige-se, em geral, que o ponto a esteja, de saída, no domínio A de f . A menos que haja menção explícita em contrário, vamos supor que isso foi feito, ou seja, admitiremos que, na definição de continuidade, apenas os pontos do domínio são considerados. Definimos aqui, para x_0 pertencente ao domínio de f :

$$f \text{ é contínua em } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ (x \in A \text{ e } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \end{cases}$$

(Alguns autores tomam inicialmente um ponto real x_0 qualquer e colocam a condição de esse pertencer ao domínio A como uma das exigências para a continuidade no ponto. Consideramos brevemente essa alternativa na última seção.)

Por outro lado, a definição de limite se aplica aos pontos de um outro conjunto, o conjunto dos pontos de acumulação de A em \mathbb{R} , geralmente denotado por A' . Um ponto $a \in \mathbb{R}$ está em A' quando qualquer intervalo aberto contendo a contém também pontos de A distintos de a (o próprio a não precisa estar em A). Por exemplo: se $A = (0;1] \cup \{2\}$, então $A' = [0;1]$. Observe que, nesse caso, não temos $A' \subset A$, nem $A \subset A'$. O ponto 2, que está em A mas não em A' , é denominado um ponto isolado de A .

Definimos para a pertencente a A' :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ (x \in A \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \end{cases}$$

Consideremos agora $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e suponhamos que a seja um ponto na interseção $A \cap A'$. Pode-se então demonstrar que f é contínua em a (segundo as definições dadas anteriormente) se, e somente se:

- (1) existe $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e
- (2) $f(a) = L$.

Nos pontos de $A - A'$, isto é, nos pontos isolados de seu domínio, f é sempre contínua (novamente, segundo as definições dadas).