Os “teoremas” de Cavalieri

Roberto Ribeiro Paterlini
UFSCar

O estudo de volumes de sólidos no ensino médio tem como base o Princípio de Cavalieri. Esse princípio também pode ser usado para áreas de regiões do plano. Existem, inclusive, versões mais gerais desse princípio, tanto para áreas como para volumes, em que a razão entre os comprimentos ou áreas das fatias não precisa ser 1, mas pode ser uma razão positiva qualquer.

Não nos esqueçamos de que o Princípio de Cavalieri, normalmente adotado como postulado nos textos para ensino da Matemática Elementar, é, na verdade, um teorema. Para demonstrá-lo é suficiente usar alguns poucos conceitos da teoria de integração de funções reais. O Princípio de Cavalieri é adotado sem demonstração para evitar as dificuldades de se apresentar precocemente essa teoria. As dificuldades ficam concentradas em uma única afirmação, que é assumida como plausível mediante uma boa explicação do professor. A ideia traduzida por esse princípio é fácil de entender, e parece que os estudantes do ensino médio não têm resistência em aceitá-la.

Os princípios de Cavalieri para áreas e volumes

Esses princípios levam o nome do matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que os chamava de método dos indivisíveis e os divulgou (em versões mais restritas) através de seu famoso livro *Geometria Indivisibilibus*, de 1635. Mas, na verdade, esse método é muito anterior a Cavalieri. Era conhecido dos antigos gregos, que o utilizavam para obter volumes de sólidos. Esses resultados eram depois demonstrados pelo método da dupla redução ao absurdo, já que na época não tinham uma teoria de integração. O mesmo faziam muitos matemáticos dos séculos XVI e XVII.

Vejamos duas versões desse princípio, uma para áreas e outra para volumes.

Princípio de Cavalieri para áreas. Sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r, as interseções de R e S com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as áreas de R e S é essa constante.

É possível demonstrar esse resultado desde que as regiões não sejam muito complicadas. Em particular, vale para discos e regiões elípticas. A ideia inicial da demonstração é simples: estamos "fatiando" as duas regiões. Se a quantidade de fatias for finita e se cada fatia de uma região tiver área sempre na mesma razão que a fatia correspondente da outra região, então somamos as áreas das fatias de cada região e obtemos o resultado. A dificuldade é que, no Princípio de Cavalieri, as "fatias" são segmentos. Portanto, não têm área, mas comprimentos, e sua quantidade é infinita. Assim, para a demonstração, precisamos de uma técnica que permita obter a área de uma região através da soma dos comprimentos de infinitos segmentos. Essa técnica é fornecida pela teoria de integração de funções reais, estudada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

Princípio de Cavalieri para volumes. Sejam P e Q sólidos limitados, e seja α um plano. Suponha que, para todo plano β paralelo a α, as interseções de P e Q com β sejam vazias ou regiões tais que a razão entre suas áreas é constante. Então a razão entre os volumes de P e Q é essa constante.

É possível provar esse princípio desde que os sólidos não sejam muito complicados. Em particular, o resultado vale para os sólidos que costumam ser estudados no ensino médio, como poliedros, esferas e elipsoides. Para fazer uma demonstração, novamente a teoria de integração de funções reais fornece a técnica necessária para obter o volume de um sólido através da soma das áreas de infinitas regiões.