

# MINHA TERRA TEM PALMEIRAS, ONDE CANTA O SABIÁ...

RICARDO AVELAR SOTOMAIOR KARAM

Para muitos, o título deste artigo lembra a belíssima *Canção do exílio* de Gonçalves Dias e sua continuação seria: “As aves, que aqui gorjeiam, não gorjeiam como lá”. Porém, outros tantos se lembrariam de alguns professores de Matemática que tiveram ao longo de sua vida escolar, provavelmente durante os tempos de “cursinho”, e continuariam o poema da seguinte forma: “seno  $a$  cosseno  $b$ , seno  $b$  cosseno  $a$ ”. Essa procura por regras mnemônicas para a simples memorização de fórmulas matemáticas, os conhecidos “macetes”, é, infelizmente, muito mais comum do que o incentivo à busca por suas deduções lógicas ou demonstrações. A ideia implícita nessa prática é a seguinte: basta que meu aluno conheça a fórmula, não é necessário que ele saiba por que a fórmula é assim! Naturalmente, essa postura não contribui em nada para fazer com que nossos estudantes entendam e, conseqüentemente, aprendam a gostar de Matemática<sup>1</sup>.

No presente artigo, apresento três maneiras distintas – e, a meu ver, perfeitamente compreensíveis para um aluno do ensino médio – de demonstrar as fórmulas do seno e

<sup>1</sup> Sobre o papel fundamental das demonstrações nas aulas de Matemática recomendo a leitura do inspirador artigo – decorar é preciso. Demonstrar também é – de Gilberto Garbi, publicado na RPM 68.

cosseno da soma e diferença de arcos. Espero poder contribuir para que esse tipo de “macete” seja definitivamente banido de nossas aulas e também para distinguir a beleza de uma poesia da beleza de uma dedução lógica da Matemática.

A princípio, estamos interessados em demonstrar as quatro fórmulas que fornecem expressões para:  $\text{sen}(\alpha + \beta)$ ,  $\text{sen}(\alpha - \beta)$ ,  $\text{cos}(\alpha + \beta)$  e  $\text{cos}(\alpha - \beta)$ . Porém, considerando que o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complemento ( $\text{sen } x = \text{cos}(90^\circ - x)$ ), que o seno é uma função ímpar ( $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$ ) e que o cosseno é uma função par ( $\text{cos}(-x) = \text{cos } x$ ), basta demonstrarmos uma delas e então será possível deduzir as outras.

### Demonstração da fórmula para $\text{sen}(\alpha + \beta)$ pelo teorema de Ptolomeu

Pela conhecida lei dos senos para um triângulo qualquer de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e ângulos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, temos:  $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$ , sendo  $R$  o raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Portanto, em uma circunferência de diâmetro unitário, ficamos com  $a = \text{sen}A$ ,  $b = \text{sen}B$  e  $c = \text{sen}C$ . (Esse fato já foi usado em [1], onde também se encontra uma demonstração de que  $\text{sen}(B + C) = \text{sen}B \text{cos}C + \text{sen}C \text{cos}B$ .)

Isso permite a interpretação do seno de um ângulo como o comprimento da corda definida por ele em uma circunferência de diâmetro unitário, como na figura 1. Com essa interpretação para o seno, consideremos o quadrilátero  $ABCD$  inscrito na circunferência como na figura 1, sendo a diagonal  $AC$  um diâmetro. O teorema de Ptolomeu (para uma demonstração, ver, por exemplo, RPM 14, seção O Leitor Pergunta) afirma que, para qualquer quadrilátero inscrito em uma circunferência, tem-se o produto das diagonais igual à soma dos produtos dos lados opostos:  $AC \cdot BD = BC \cdot AD + CD \cdot AB$ .

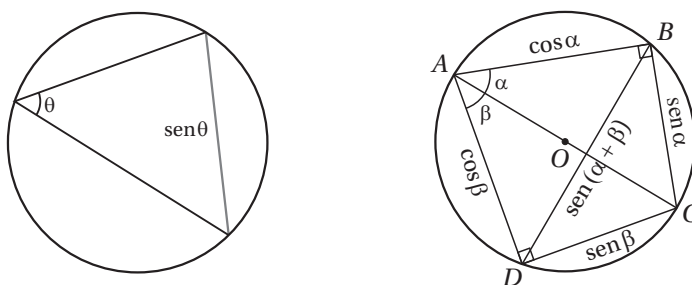


figura 1