

UMA PEQUENA HISTÓRIA DE UM BELO PROBLEMA

CHICO NERY

Colégio San Conrado - Campinas

Liceu Albert Sabin - Ribeirão Preto

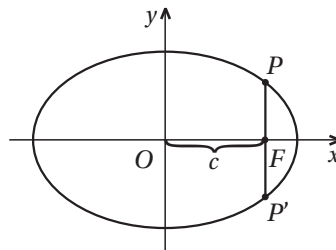
Durante uma aula numa turma especial de 3^a série do ensino médio, na qual falávamos sobre a equação da elipse, resolvi propor o seguinte exercício:

Dentre todas as cordas que passam por um dos focos de uma elipse, aquela perpendicular ao eixo maior chama-se corda focal mínima. Dada a equação de uma elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, determine a medida da sua corda focal mínima.

Resolvemos o problema de duas maneiras, uma mais analítica e outra mais sintética, como mostro a seguir:

1^a maneira

Sejam P e P' as extremidades da corda focal mínima em relação ao foco F .



Esses dois pontos têm abscissa c (metade da distância focal) e pertencem à elipse. Logo, para determinar suas ordenadas basta substituir x por c na equação da elipse.

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ou } \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \text{ ou } y^2 = \frac{b^4}{a^2}.$$

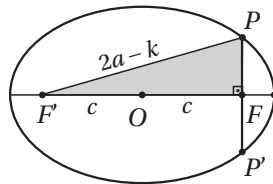
Então, $y = \pm \frac{b^2}{a}$ e, portanto, $y_p = \frac{b^2}{a}$ e $y_{p'} = -\frac{b^2}{a}$.

Daí concluímos que a medida da corda focal mínima é:

$$\overline{PP'} = y_p - y_{p'} = \frac{2b^2}{a}.$$

2ª maneira

Sendo $\overline{PF} = k$, temos $\overline{PF'} = 2a - k$, pois, sendo P um ponto da elipse sabe-se que $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$.

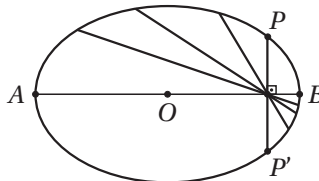


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $PF'F$, encontramos:

$(2a - k)^2 = k^2 + (2c)^2$ ou $k = \frac{b^2}{a}$, e, portanto, a medida da corda focal mínima

é: $\overline{PP'} = 2k = \frac{2b^2}{a}$.

Terminada essa aula, saindo da sala, fui interceptado pela Tamires, uma das melhores alunas dessa turma, que me apresentou a seguinte questão: *Se essa corda da qual achamos a medida chama-se corda focal mínima deve ser porque ela é a menor de todas as cordas que passam por aquele foco?! Como se prova isso?*



Respondi: “Assim de pronto não sei responder, mas vou pensar e na semana que vem conversaremos”, mas acrescentei: “Pense você também”.

Rabisquei o papel nas minhas poucas horas vagas e não consegui uma solução adequada ao nível do ensino médio. Ansioso, pois queria dar uma