

O CENTRO DE MASSA DE UM TRIÂNGULO

SÉRGIO ALVES
IME – USP

Qual é o centro de massa de um triângulo? Certamente a maioria dos professores e estudantes de Matemática ou Física dará como resposta o baricentro do triângulo (o ponto de concorrência das suas três medianas). A resposta correta, no entanto, depende do entendimento que damos ao termo triângulo.

Dados três pontos não colineares A , B e C , adotamos como definição de triângulo ABC , de vértices A , B , C e lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} , o conjunto obtido pela reunião desses segmentos, isto é, $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$. Vamos, neste texto, definir como região triangular ABC a reunião do triângulo com o conjunto dos seus pontos interiores.

Quando investigamos o conceito de centro de massa, é importante distinguir entre os conjuntos: o triângulo, modelado por um arame fino homogêneo, a região triangular, modelada por uma lâmina delgada homogênea, e o conjunto formado por três pontos não colineares afetados de determinadas massas.

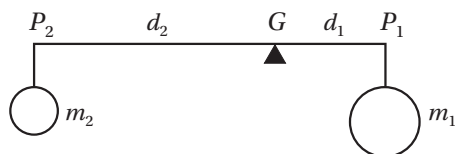
A experiência de recortar um triângulo num cartão homogêneo e observar que o triângulo fica equilibrado quando apoiado pela ponta de um lápis colocado no encontro de suas medianas reflete o fato de que o centro de massa da região triangular é o baricentro do triângulo. Fisicamente é como se

a massa total do modelo estivesse concentrada nesse ponto (veja RPM 63, p. 33).

Assim como para a região triangular homogênea, o centro de massa de três pontos não colineares afetados de massas iguais é também o baricentro do triângulo definido por tais pontos. Por outro lado, quando investigamos o centro de massa de um triângulo surge um novo ponto notável do triângulo, em geral distinto do seu baricentro. Que ponto é esse?

O centro de massa de um sistema discreto de pontos

Considere dois corpos de massas positivas m_1 e m_2 pendurados nas extremidades de uma barra rígida de massa desprezível. Há um único ponto G onde a barra pode ser apoiada de modo que o sistema fique em equilíbrio: G é o centro de massa do sistema.



Sendo d_1 a distância entre G e a extremidade P_1 onde m_1 está pendurada e d_2 a distância correspondente entre G e a extremidade P_2 , a posição de G é determinada pela condição

$$m_1 d_1 = m_2 d_2. \quad (1)$$

Assim, se a massa m_1 for o dobro de m_2 , para que haja equilíbrio, a sua distância d_1 ao ponto de apoio deve ser a metade da distância d_2 . Esse princípio foi descoberto por Arquimedes e é conhecido como a Lei da Alavanca.

Se considerarmos uma orientação para a reta r que contém os pontos P_1 e P_2 , então G é o único ponto de r que satisfaz a igualdade

$$m_1 GP_1 + m_2 GP_2 = 0. \quad (2)$$

Com efeito, as duas distâncias orientadas GP_1 e GP_2 têm sinais contrários se e somente se o ponto G está entre os pontos P_1 e P_2 . Logo (2) é equivalente a $m_1 d_1 - m_2 d_2 = 0$, que é o mesmo que (1).

Se x_i é a coordenada (na reta r) do ponto P_i , $i = 1, 2$ e \bar{x} é a coordenada do centro de massa G do sistema, então podemos escrever (2) como $m_1(x_1 - \bar{x}) + m_2(x_2 - \bar{x}) = 0$. Desenvolvendo essa expressão, obtemos

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = \bar{x}(m_1 + m_2), \text{ ou seja, } \bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$