



## Relações métricas na parábola

*Geraldo Henrique Botelho Lins*

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

### Introdução

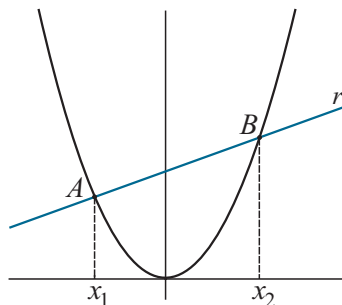
Os estudantes que completaram o ensino médio devem estar familiarizados com o estudo das cônicas e, particularmente no caso da circunferência, com o estudo das relações métricas e de outras propriedades que se revelam importantes na solução de alguns problemas geométricos. Pretendemos mostrar que, se usamos a parábola, podemos chegar a relações surpreendentes e até muito semelhantes às já estudadas no caso da circunferência.

Lembramos que uma parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano, equidistantes de um ponto (o foco) e uma reta (a diretriz). É bem conhecido que, escolhendo o eixo  $x$  como sendo a tangente no vértice e o eixo  $y$  como o eixo da parábola (reta perpendicular à diretriz que passa pelo foco), a parábola tem equação  $y = ax^2$ , sendo  $a = \frac{1}{2p}$ , em que  $p$  é a distância do foco à diretriz, chamada de *parâmetro* da parábola.

Por isso, sem perda de generalidade, estudaremos a parábola de equação  $y = ax^2$ , com  $a > 0$ .

### Cordas da parábola

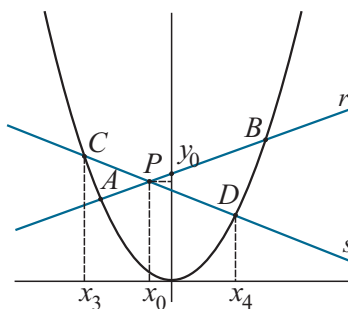
Uma reta  $r$  não perpendicular à diretriz da parábola  $y = ax^2$  tem equação  $y = mx + k$  e corta a curva em dois pontos  $A$  e  $B$ , determinando uma corda  $\overline{AB}$ . Os coeficientes angular e linear da reta  $r$  podem ser expressos em termos das abscissas dos pontos  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$ . De fato, como esses pontos pertencem à reta  $r$  e à parábola  $y = ax^2$ , segue que  $x_1$  e  $x_2$  são as raízes da equação  $ax^2 - mx - k = 0$ . Isso implica  $m = a(x_1 + x_2)$  e  $k = -ax_1x_2$ .



Considere agora, como na figura, a intersecção  $P = (x_0, y_0)$  de duas cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , cujos suportes são as retas  $r$  e  $s$ , sendo  $C = (x_3, y_3)$  e  $D = (x_4, y_4)$ . Pelo feito anteriormente, temos as equações:

$$r: y = a(x_1 + x_2)x - ax_1x_2 \text{ e}$$

$$s: y = a(x_3 + x_4)x - ax_3x_4.$$



Como o ponto  $P$  pertence às duas retas, podemos escrever:

$$a(x_1 + x_2)x_0 - ax_1x_2 = a(x_3 + x_4)x_0 - ax_3x_4.$$

Dividindo por  $a$ , desenvolvendo e subtraindo  $x_0^2$  de ambos os membros, fica, sucessivamente:

$$x_1x_0 + x_2x_0 - x_1x_2 - x_0^2 = x_3x_0 + x_4x_0 - x_3x_4 - x_0^2$$

$$x_1(x_0 - x_2) - x_0(x_0 - x_2) = x_3(x_0 - x_4) - x_0(x_0 - x_4)$$

$$(x_1 - x_0)(x_0 - x_2) = (x_3 - x_0)(x_0 - x_4).$$

Tomando os módulos:  $|x_0 - x_1||x_2 - x_0| = |x_0 - x_3||x_4 - x_0|$ .

Reconhecemos que esses módulos das diferenças de abscissas são os comprimentos das projeções sobre o eixo  $x$  (ou sobre a