Márcio Andrade Monteiro
Curso Seleção – DF

Vejam o que eles fizeram

Ao estudar os pontos notáveis de um triângulo, baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro, dois alunos meus de uma turma de curso preparatório para o concurso de admissão ao Colégio Naval (concurso este que exige a 8ª série do ensino fundamental, mas com grau de dificuldade das provas bastante alto, principalmente em Matemática) observaram uma propriedade interessante do ortocentro:

> *O simétrico do ortocentro em relação a um lado pertence à circunferência circunscrita.*

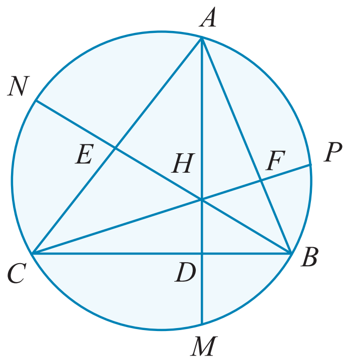
Fernando Lucatelli, 14 anos, e Alex Moroguma, 15 anos, iniciaram estudando o caso do triângulo acutângulo, que é o mais interessante, e depois estenderam o resultado para os triângulos retângulo e obtusângulo. Vejam o que eles fizeram.

1º caso: triângulo acutângulo

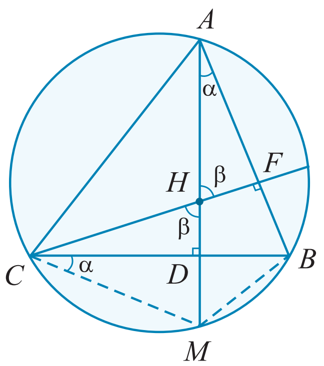
Considere um triângulo ABC inscrito em uma circunferência. Traçando, pelos vértices, segmentos perpendiculares aos lados opostos teremos as alturas $\overline{AD}, \overline{BE}$ e $\overline{CF}$ que se cortam em H, ortocentro de ABC. As retas suportes das alturas cortarão a circunferência em M, N e P, respectivamente.

Proposição

$\overline{DH} = \overline{DM}$, $\overline{EH} = \overline{EN}$ e $\overline{FH} = \overline{FP}$.



Demonstração

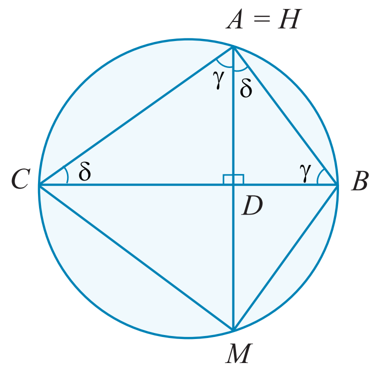


Se $D\hat{A}B = \alpha$ e $A\hat{B}C = \gamma$, então α e γ são complementares e $F\hat{C}B = 90^\circ - \gamma = \alpha$, pois o triângulo *FCB* é retângulo. Além disso, $D\hat{A}B$ e $M\hat{C}B$ são ângulos inscritos relativos ao mesmo arco *BM*, logo $M\breve{C}B = \alpha$.

Os triângulos *CHD* e *MCD* são congruentes, (caso ALA) e, portanto, $\overline{DH} = \overline{MD}$, como queríamos demonstrar.

Repetindo o mesmo raciocínio para os outros lados, temos provada a proposição.

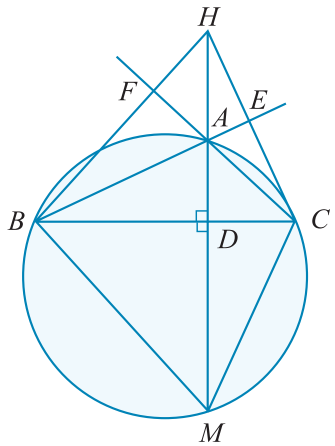
2º caso: triângulo retângulo



O ortocentro de um triângulo retângulo coincide com o vértice do ângulo reto.

Se $A\breve{B}C=\gamma$ e $A\breve{C}B=\delta$ então $B\breve{A}M=A\breve{C}B=\delta$. Além disso, $A\breve{C}B$ e $B\breve{M}A$ são ângulos inscritos relativos ao mesmo arco *AB*, logo $B\breve{M}A=\delta$. Logo, os triângulos *ABD* e *MBD* são congruentes e, portanto, $\overline{DM}=\overline{DA}$.

3º caso: triângulo obtusângulo



Se $A\breve{B}C=\gamma$, então $D\breve{A}B=90^\circ-\gamma=H\breve{A}E$, e, como $A\breve{H}E$ é o complemento de $H\breve{A}E$, então $A\breve{H}E=90^\circ-(90^\circ-\gamma)=\gamma$. Além disso, $A\breve{M}C=A\breve{B}C$ pois são ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco *AC*. Logo, os triângulos retângulos *CDH* e *CDM* são congruentes o que implica $\overline{DH}=\overline{MD}$.

A proposição está demonstrada.

Apesar de o resultado descoberto não ser inédito, eu mesmo já o tinha utilizado uma vez na resolução de um problema, a propriedade não é algo comum que aparece em livros didáticos, nem como exercício.

O mais importante dessa descoberta é ver que jovens com talento acima da média em Matemática podem, recebendo o estímulo adequado, fazer suas próprias descobertas, mesmo sendo bastante novos e ainda levando em consideração que a Geometria desenvolvida no ensino fundamental, na maioria das escolas, é muito superficial.