# Embalagens

*Rogério César dos Santos*
*Sandra A. de Oliveira Baccarin*

Você deve ter observado que várias marcas de sabão em pó tiveram uma mudança na embalagem de 1kg: passaram de um paralelepípedo “mais estreito e alto” para um “mais largo e baixo”.

As embalagens têm medidas aproximadamente iguais a:

embalagem antiga: 4,8 cm x 16,8 cm para a base e 24 cm para a altura

embalagem nova: 19 cm x 7 cm para a base e 14,5 cm para a altura

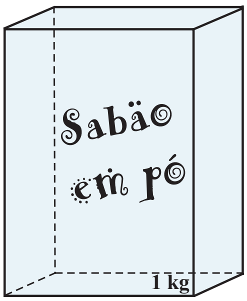
Isso despertou minha curiosidade: teria sido o motivo puramente estético ou houve intenção das empresas de procurar menor custo para as embalagens dos produtos, uma vez que o custo incide diretamente sobre o lucro final?

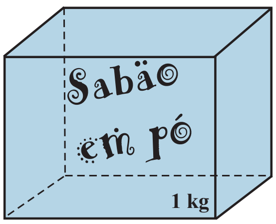
Primeiro, fiz o cálculo do volume dos paralelepípedos das duas embalagens para verificar se ficara mantido:

$$4{,}8 \times 16{,}8 \times 24 \text{ cm}^3 = 1935{,}36 \text{ cm}^3$$

$$19 \times 7 \times 14{,}5 \text{ cm}^3 = 1928{,}5 \text{ cm}^3$$

Logo, a menos de aproximações nas medidas, podemos supor o volume mantido e suficiente para embalar 1kg do produto.



Agora, os cálculos das áreas superficiais dos paralelepípedos, em $cm^2$:

| **Embalagem antiga** | **Embalagem nova** |
|---|---|
| 24 x 16,8 x 2 = 806,40 | 19 x 14,5 x 2 = 551 |
| 16,8 x 4,8 x 2 = 161,28 | 19 x 7 x 2 = 266 |
| 4,8 x 24 x 2 = 230,40 | 7 x 14,5 x 2 = 203 |
| Total = 1198,08 $cm^2$ | Total = 1020 $cm^2$ |

Bingo! A caixa atual utiliza menos material para ser confeccionada que a caixa antiga.

Considerando que a população do Brasil seja aproximadamente 180 milhões de habitantes e supondo que um terço dessa população use uma caixa de sabão por mês, isso resultaria numa economia de:

60 000 000 x (1 198,08 – 1 020) $cm^2$ = 10 684 800 000 $cm^2$ =

1 068 480 $m^2$ de papelão por mês.

Você já parou para pensar nisso?

Será que haveria uma possibilidade de conseguir uma área ainda menor que a caixa atual, mantendo o mesmo volume? Esse é um problema que pode ser resolvido usando cálculo diferencial para determinar o ponto de mínimo da função que fornece a área superficial da embalagem com volume fixado. O que acontece é que a embalagem que forneceria o valor mínimo (um cubo) não é apropriada para ser manuseada; logo, as empresas têm que fazer uma adaptação entre o mínimo matemático e o prático.

Para uma atividade em sala de aula, podemos, por tentativa, buscar a área superficial mínima, fixando em 7 cm a medida lateral da base da caixa, que julgamos adequada ao manuseio.

Considerando o volume da caixa igual a 1 928,5 $cm^3$, denotando por $c$ a outra dimensão da base e por $h$ a altura da caixa, temos:

$$h = \frac{1928{,}5}{7c}.$$

A área superficial do paralelepípedo será dada por $A = 2 \cdot 7 \cdot c + 2 \cdot 7 \cdot h + 2 \cdot c \cdot h$, e substituindo o valor de $h$ na expressão obtemos:

$$A = 14c + 14 \cdot \frac{1928,5}{7c} + 2c\left(\frac{1928,5}{7c}\right)$$

$$A = 14c + \frac{3857}{c} + 551$$

Com essas expressões, podemos pedir aos alunos que utilizem o programa Excel para construir a tabela abaixo.

| $c$ | Área | $h$ |
|---|---|---|
| 5 | 1392,4 | 55,1 |
| 6 | 1277,833 | 45,91667 |
| 7 | 1200 | 39,35714 |
| 8 | 1145,125 | 34,4375 |
| 9 | 1105,556 | 30,61111 |
| 10 | 1076,7 | 27,55 |
| 11 | 1055,636 | 25,04545 |
| 12 | 1040,417 | 22,95833 |
| 13 | 1029,692 | 21,19231 |
| 14 | 1022,5 | 19,67857 |
| 15 | 1018,133 | 18,36667 |
| 16 | 1016,063 | 17,21875 |
| 16,5 | 10015,758 | 16,69697 |
| 17 | 1015,882 | 16,20588 |
| 18 | 1017,278 | 15,30556 |
| 19 | 1020 | 14,5 |
| 20 | 1023,85 | 13,775 |

Pelos cálculos, podemos perceber que a área mínima será obtida para valores de $c$ e $h$ por volta de 16,5 cm. Para manter o volume próximo de 1928,5, escolhemos $c = h = 16,6$, obtendo $V = 1\,928,92$ e $A = 1\,015,92$.

Com essas medidas, em relação à caixa atual, haveria uma economia mensal de papel igual a

$$60\,000\,000(1\,020 - 1\,015,92) = 24\,480 \text{ m}^2.$$