

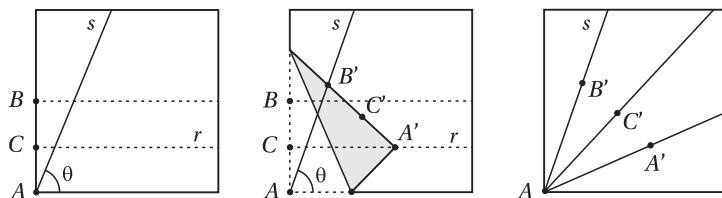
MATEMÁTICA *VERSUS* ORIGAMI:

TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO AGUDO

HIDEO KUMAYAMA

A trisseccção de um ângulo qualquer é um dos três problemas clássicos da Matemática grega que têm sido motivo de inquietações dos matemáticos de diversas vertentes, desde os tempos de Hippias de Elis (séc. V a.C.) até os dias atuais (ver, por exemplo, RPM 51, p. 17, ou RPM 66, p. 34). O mundo origamístico também tem a sua participação nesse problema: segundo [1], Abe descobriu, em 1970, o método da trisseccção de um ângulo através do origami e mais tarde outros métodos de trisseccção foram descobertos independentemente (ver [1] e [2]).

A RPM 64 (problema 267, p. 48) apresenta uma variação muito interessante do método da trisseccção de Abe: “Numa folha quadrada de papel desenhe ou dobre um ângulo θ , marque a metade da folha e a metade da metade. Dobre a folha de modo que A caia em um ponto A' pertencente a r e B em um ponto B' pertencente a s (ver figura). Marque os pontos A' , B' e C' , o correspondente a C na dobra. Prove que AB' , AA' e AC' trisseccionam o ângulo θ ”.



Testando vários ângulos, verificamos que o método usado na solução do problema 267, apresentada na RPM 66, pág. 47, de fato funciona para valores de θ , por exemplo, maiores que 45° . Entretanto, experimentando o método para ângulos pequenos, verificamos que o ponto A' cai fora do papel quadrado e o método não funciona (em um papel quadrado). Vejamos o que acontece.

Se ℓ é o lado do quadrado, pela construção temos

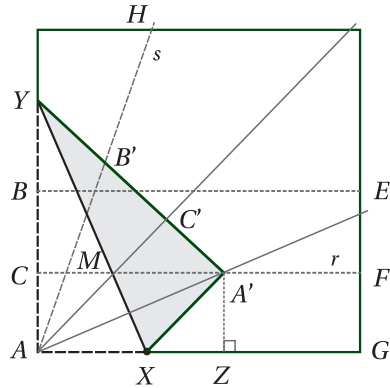
$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{3} = \frac{A'Z}{AZ} = \frac{\frac{1}{4}\ell}{CA'} = \frac{\ell}{4CA'}$$

Logo, se $\operatorname{tg} \frac{\theta}{3} = \frac{1}{4}$, ou seja, $\theta = \theta_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right) \cong 11,07^\circ$, teremos $\ell = CA'$ e o ponto A' cairá na borda do papel.

Se $\operatorname{tg} \frac{\theta}{3} > \frac{1}{4}$, ou seja, $\theta > \theta_0$, então, $CA' < \ell$ e o ponto A' cairá em r , dentro do papel quadrado.

Se $\operatorname{tg} \frac{\theta}{3} < \frac{1}{4}$, ou seja, $\theta < \theta_0$, então, $CA' > \ell$ e o ponto A' cairá em r , fora do papel quadrado.

Observando que $\operatorname{tg} \frac{45^\circ}{3} = \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2 - \sqrt{3} > \frac{1}{4}$, vem que $\theta_0 < 45^\circ$ e a construção no papel quadrado é possível, em particular, para $45^\circ \leq \theta < 90^\circ$.



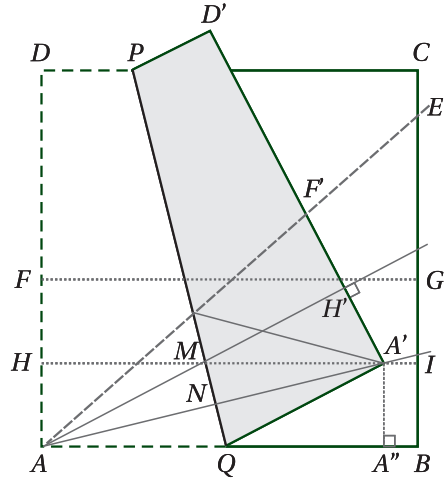
Como trisseccionar um ângulo menor que 45° apenas com dobras num papel quadrado?

Mostremos que isso pode ser feito com uma modificação no método apresentado na RPM 66.

No papel quadrado $ABCD$ vinque AE , E pertencente ao lado BC , obtendo o ângulo α . No ponto médio da distância de E ao lado AB , faça o vinco FG , paralelo a AB . Vinque HI paralelo a AB , pelo ponto médio de AF . A seguir, dobre de modo que F caia sobre F' pertencente a AE , e o vértice A caia sobre HI , em A' . Marque o ponto H' , correspondente a H na dobra.

a) Mostremos que AF' , AH' e AA' trissecionam o ângulo α , $\alpha < 45^\circ$.

Considerando o eixo de simetria PQ , temos que os triângulos AQM e $A'QM$ são congruentes. Dessa congruência e do paralelismo dos segmentos AB e HI podemos concluir que os ângulos $\widehat{A'QA''}$, \widehat{MAQ} e $\widehat{QA'M}$ são congruentes e que o quadrilátero $A'MAQ$ é um losango. Da congruência dos triângulos retângulos HMA e $H'MA'$ podemos concluir que A , M e H' são colineares.



Como $H'A$ e $F'A'$ são perpendiculares pelo ponto médio H' , podemos afirmar que o triângulo $F'AA'$ é isósceles. Como a diagonal maior do losango, AA' , está contida na bissetriz do ângulo $\widehat{H'AQ}$ e a altura $H'A$ do triângulo isósceles $F'AA'$ está contida na bissetriz do ângulo $\widehat{F'AA'}$, obtemos

$$m(\widehat{EAB}) = 3m(\widehat{EAH'}) = 3m(\widehat{H'AA'}) = 3m(\widehat{A'AB}).$$

b) Mostremos, então, que essa construção pode ser feita dentro do papel quadrado.

Fazendo $\alpha = 3x$ com $0^\circ < 3x < 45^\circ$ ou $0^\circ < x < 15^\circ$, seja ℓ o lado do quadrado e $\ell' = EB$. Então, $\ell' = \ell \operatorname{tg}(3x)$ e, por outro lado, $\operatorname{tg} x = \frac{A'A''}{AA''} = \frac{\frac{1}{4}\ell'}{HA'}$; portanto, $HA' = \frac{\ell'}{4\operatorname{tg}(x)} = \frac{\ell \operatorname{tg}(3x)}{4\operatorname{tg}(x)}$.

Logo, A' cai no papel quadrado se e somente se $\frac{\operatorname{tg}(3x)}{4\operatorname{tg}(x)} < 1$ ou $\frac{4\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(3x)} > 1$.

Sendo $\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$ e $3 - \operatorname{tg}^2 x > 0$ e $\operatorname{tg} x > 0$ no intervalo considerado, temos

$$\frac{4\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(3x)} > 1 \Leftrightarrow \frac{4\operatorname{tg}(x)(1 - 3\operatorname{tg}^2 x)}{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x} > 1 \Leftrightarrow \frac{4(1 - 3\operatorname{tg}^2 x)}{3 - \operatorname{tg}^2 x} > 1 \Leftrightarrow$$

$$4(1 - 3\operatorname{tg}^2 x) > 3 - \operatorname{tg}^2 x \Leftrightarrow 11\operatorname{tg}^2 x < 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x) < \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Como $\operatorname{tg}15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} < \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{12}} < \frac{1}{\sqrt{11}}$, a desigualdade é verdadeira para $0^\circ \leq x \leq 15^\circ$.

Observação

Quando o ângulo α a ser trisseccionado for muito pequeno, teremos dificuldades com o método anterior. Uma alternativa é transformar o problema na trisseção do seu complementar θ , maior que 45° , usando o método de construção sugerido na solução do problema 267. Em seguida, basta subtrair $\theta/3$ de 30° , sendo a subtração um procedimento simples por dobraduras.

Nota: Agradeço aos professores Daniel Victor Tausk (IME-USP) e Severino do Rego Melo (IME-USP) pela colaboração na redação deste texto.

Referências bibliográficas

- [1] DEMAINE, E. et all. *Geometric Folding Algorithms: linkages, origami, polyhedra* (Geometric Constructibility, p. 285). NY: Cambridge University Press, 2007.
- [2] HULL, T. *Project origami: activities for exploring mathematics*. Wellesley, MA: A K Peters, 2006.